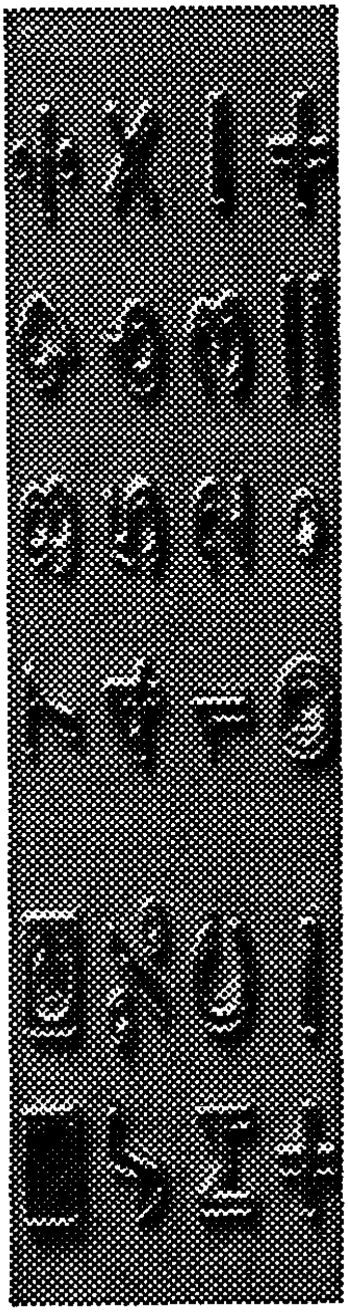
TEMA

14



MATEMÁTICAS

Desarrollo de los temas

Ecuaciones. Resolución de ecuaciones. Aproximación numérica de raíces.

elaborado por
EL EQUIPO DE PROFESORES
DEL CENTRO DOCUMENTACIÓN

CEDE

GUIÓN - ÍNDICE

BIBLIOGRAFÍA

DEMIDOVICH, B.P.
MARON, I.A.
Cálculo numérico fundamental. Ed. Paraninfo. Madrid, 1985.

El objetivo fundamental de este libro es ofrecer, lo más profundamente posible, una representación sistemática y moderna de los métodos y técnicas más importantes del cálculo numérico. Trata con especial interés el problema de la solución aproximada y numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes.

REY PASTOR, J.,
PI CALLEJA, P.
TREJO, C.A.
Análisis matemático I. Ed. Kapelusz. Buenos Aires, 1952.

Obra muy completa y didáctica con explicaciones muy claras, que no ha perdido actualidad a pesar de los años. El primer tomo contiene los elementos de Álgebra y Cálculo a nivel de primer curso y los otros dos tomos el Análisis n-dimensional, las ecuaciones diferenciales y otros temas.

ROJO, A.O.
Álgebra I. Ed. El Ateneo. Buenos Aires, 1972.

Libro muy completo y muy claro en dos tomos. El primero trata los temas de Álgebra abstracta y el segundo los de Álgebra lineal. Contiene muchos ejercicios resueltos bajo el nombre de “Trabajo práctico” y otros propuestos.

1. ECUACIONES

1.1. INTRODUCCIÓN

Definición

Se llama **función proposicional** a toda expresión que contenga por lo menos una variable, de modo que al reemplazar cada una de éstas por un elemento de un conjunto dado se transforme en una proposición.

Ejemplos:

1. Si **C**, es el conjunto de las ciudades, y **N**, el de las naciones:

“**x es la capital de y/x ∈ C, y ∈ N**”

es una función proposicional, que se convierte en proposición cuando se sustituye x por un elemento de C, e y por un elemento de N. En efecto: “**Caracas es la capital de Venezuela**”, es una proposición verdadera, mientras que “**Montevideo es la capital de España**” es una proposición falsa.

2. $x + 3 < 8$, $x \in \mathbb{N}$, es una función proposicional que se convierte en proposición al sustituir x por un número natural. En efecto: $4 + 3 < 8$ es una proposición verdadera, mientras que $6 + 3 < 8$ es una proposición falsa.

Una función proposicional por sí misma no tiene ningún valor de verdad, es decir no es una proposición.

Definición

Se llaman **soluciones** de una función proposicional al conjunto de valores de las variables que convierten a la función en una proposición verdadera. Así en el ejemplo **2**, la solución es el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Resolver una función proposicional es hallar el conjunto de sus soluciones.

Definición

Se llama **ecuación** a una función proposicional, definida sobre uno o más conjuntos, que contiene el signo el signo igual (=).

Las variables que intervienen en una ecuación se llaman **incógnitas**.

Al conjunto de valores de las incógnitas que convierten la ecuación en una igualdad verdadera, se llaman **soluciones particulares** o **raíces de la ecuación**.

Resolver una ecuación es hallar por extensión el conjunto de sus soluciones, es decir, su solución general.

Ejemplo

La ecuación $2x + y = x + 2y + 3$ tiene por solución al conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 3\}$. Tiene por tanto infinitas soluciones.

1.2. CLASIFICACIÓN

Las ecuaciones se pueden clasificar

a) Por el número de incógnitas.

b) Por la naturaleza de las expresiones que figuran en sus miembros. De acuerdo a esto pueden ser:

b1. Algebraicas: Cuando los dos miembros son expresiones A (x, y, ...), B (x, y, ...) formadas por las incógnitas y números reales, sometidos un número finito de veces a las operaciones suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponente natural y radicación.

b2. Trascendentes: Cuando no son algebraicas. Por ejemplo $2^x = 3$. Las algebraicas se dividen a su vez en:

b.1.1. Racionales: Cuando no contiene ninguna incógnita bajo signo radical.

b.1.2. Irracionales: En el caso contrario. Por ejemplo

$$\sqrt{x+2} = 3$$

Las racionales a su vez pueden ser:

b.1.1.1. Enteras: Cuando no tienen ninguna incógnita como divisor.
b.1.1.2. Fraccionarias: Cuando sí tienen alguna incógnita como divisor. Por ejemplo:

$$x+2=\frac{5+x}{3x-1}$$

Resumiendo:

$$\textbf{Ecuaciones}\left\{\begin{array}{l}\text{Algebraicas}\left\{\begin{array}{l}\text{Racionales}\left\{\begin{array}{l}\text{Enteras}\\ \text{Fraccionarias}\end{array}\right.\\ \text{Irracionales}\end{array}\right.\\ \\ \text{Trascendentes}\end{array}\right.$$

1.3. EQUIVALENCIA DE ECUACIONES

Dos ecuaciones se dicen **equivalentes** cuando toda solución de la primera es solución de la segunda y viceversa.

Para obtener ecuaciones equivalentes a una dada podemos realizar las siguientes transformaciones:

1. Sumar a ambos miembros de la ecuación un mismo número.

Este resultado puede enunciarse de otras formas frecuentemente más cómodas:

a) Un número que esté sumando en un miembro de una ecuación, puede pasar al otro miembro restando (transposición de términos).
b) Se pueden suprimir números iguales que estén sumando en los dos miembros de la ecuación.

Estos enunciados son igualmente válidos si en lugar de un número se trata de un polinomio con la incógnita.

2. Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número real distinto de cero.

Notar que esta vez no se puede generalizar al caso de un polinomio pues puede haber valores de la incógnita que anulen dicho polinomio.

3. Si se elevan los dos miembros de la ecuación a la misma potencia, resulta otra ecuación que tiene todas las raíces de la primera ecuación y quizás alguna más.

Ejemplo: $x - 2 = 1$, tiene por solución $x = 3$. Si elevamos los dos miembros de la ecuación al cuadrado tenemos $(x - 2)^2 = 1$, que tiene por soluciones $x = 1$, $x = 3$.

2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO ≤ 3

2.1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que una ecuación de primer grado es de la forma

$$\mathbf{ax + b = 0 \qquad a \neq 0}$$

Esto es posible, pues mediante las transformaciones anteriormente citadas podemos agrupar por un lado los términos que contengan a la incógnita y por otro los términos independientes.

La solución de esta ecuación será $\mathbf{x = (-b)/a}$.

2.2. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Podemos considerar, al igual que en el caso anterior, que una ecuación de segundo grado es de la forma

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0}$$

Veamos cuáles son sus soluciones:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Es fácil probar que se verifica:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2 &= \frac{-b}{a} \\ x_1\cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Al número $b^2 - 4ac$, se le llama **Discriminante de la ecuación** y se denota por Δ.

Cuando el polinomio lo consideremos de Ě[x], según sea el valor del discriminante, podemos afirmar que:

a. Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.
b. Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ la ecuación tiene una raíz real doble.
c. Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ la ecuación no tiene raíces reales.

2.3. ECUACIONES DE TERCER GRADO

Vamos a calcular las soluciones de un polinomio de tercer grado:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad a_3 \neq 0$$

Podemos suponer que $a_3 = 1$, pues caso de que no fuese dividiríamos toda la ecuación por $a_3 \neq 0$, y obtendríamos una ecuación equivalente.

Aun podemos simplificar más la expresión anterior, pues haciendo el cambio:

$$x = x' - \frac{a_2}{3}$$

se anula el término en x^2, como puede comprobarse fácilmente:

$$\left(x'-\frac{a_2}{3}\right)^2+a_2\cdot\left(x'-\frac{a_2}{3}\right)^2+a_1\cdot\left(x'-\frac{a_2}{3}\right)+a_0=$$

$$=x'^3-3\cdot\frac{a_2}{3}\cdot x'^2+3\cdot\frac{a_2^2}{9}\cdot x'-\frac{a_2^3}{27}+a_2\cdot x'^2-2\cdot\frac{a_2^2}{3}+\frac{a_2^3}{9}+a_1\cdot x'-\frac{a_1\cdot a_2}{3}+a_0=$$

$$=x'^3-a_2\cdot x'^2+\frac{a_2^2}{3}\cdot x'-\frac{a_2^3}{27}+a_2\cdot x'^2-2\cdot\frac{a_2^2}{3}+\frac{a_2^3}{9}+a_1\cdot x'-\frac{a_1\cdot a_2}{3}+a_0=$$

$$=x'^3+\frac{a_2^2}{3}\cdot x'-\frac{a_2^3}{27}-2\cdot\frac{a_2^2}{3}\cdot x'+\frac{a_2^3}{9}+a_1\cdot x'-\frac{a_1\cdot a_2}{3}+a_0$$

que como puede verse no tiene término en x^2. Por tanto podemos suponer que la ecuación es de la forma:

$$\mathbf{x^3 + px + q = 0\ (*)}$$

Hagamos ahora el cambio **x = u + v**, y agrupemos convenientemente los términos de la ecuación (*); podemos poner:

$$\mathbf{u^3 + v^3 + 3uv\,(u + v) + p\,(u + v) + q = u^3 + v^3 + (3uv + p)\,(u + v) + q = 0}$$

La anterior igualdad se satisface si se cumple:

$$\left.\begin{aligned}3uv&=-p\\u^3+v^3&=-q\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}u^3v^3&=-\frac{p^3}{27}\\u^3+v^3&=-q\end{aligned}\right\}$$

Las dos últimas igualdades, por (1), nos aseguran que u^3 y v^3 son las raíces de la ecuación

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$$

y por tanto

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}};\qquad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

de donde

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}; \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

y como x = u + v, tenemos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Estas fórmulas se deben a Cardano-Vieta.

Ejemplo: Calculemos las soluciones de la ecuación:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Hagamos el cambio x = y + 2; nos queda

$$(y + 2)^3 - 6\,(y + 2)^2 + 11\,(y + 2) - 6 = y^3 - y = 0.$$

Aunque las soluciones de esa ecuación pueden calcularse de manera fácil, seguiremos un proceso paralelo al explicado anteriormente.

Para resolver la ecuación $y^3 - y = 0$, hagamos el cambio y = u + v, con lo que tenemos:

$$(u + v)^3 - (u + v) = 0 = \Rightarrow u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - (u + v) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u^3 + v^3 + 3uv\,(u + v) - (u + v) = 0 \Rightarrow u^3 + v^3 + (3uv - 1)\,(u + v) = 0$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} 3uv &= 1 \\ u^3 + v^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u^3v^3 &= \frac{1}{27} \\ u^3 + v^3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

luego:

$$\left.\begin{array}{r} -v^6 = \dfrac{1}{27} \Rightarrow v^3 = \sqrt{\dfrac{-1}{27}} = \sqrt{\dfrac{i^2}{27}} = \dfrac{i}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}i}{9} \\ u^3 = -\dfrac{\sqrt{3}i}{9} \end{array}\right\}$$

y calculando las raíces cúbicas de estos números complejos (fórmula de Moivre), nos queda

y = 1, –1, 0

Por lo que deshaciendo el cambio x = y + 2, tenemos

x = 3, 1, 2

Para las ecuaciones de grado 4, existen también fórmulas que fueron descubiertas en el siglo XVI por los italianos Ferro, Tartaglia, Cardano y Ferrari. Sin embargo el sueño de los algebristas de encontrar fórmulas que permitiesen resolver ecuaciones de grado superior a 4, se estrelló en la barrera de lo imposible, como quedó probado en el primer tercio del siglo XIX por los matemáticos Abel y Galois, al demostrar, primero la irresolubilidad de la ecuación general de quinto grado y segundo la de las ecuaciones de grado n > 4, entendiendo por irresolubilidad de una ecuación, la imposibilidad de encontrar, mediante una fórmula, sus soluciones.

La existencia y abundancia de ecuaciones irresolubles, y la frecuente aparición de éstas en la resolución de problemas que plantean la ciencia, la técnica y la vida cotidiana, son razones suficientes que obligan a intentar obtener, si no las raíces, sí al menos unos valores suficientemente próximos a ellas.

3. APROXIMACIÓN DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN

En todo lo que sigue, supondremos que **f** es una función real de variable real, con dominio **D**.

Cuando hablemos de las raíces de la ecuación f(x) = 0, sobrentenderemos que nos referimos a sus raíces reales. Además supondremos que las raíces que la ecuación f(x) = 0 pueda tener, serán raíces aisladas, es decir, que la distancia entre dos consecutivas cualesquiera, tiene un mínimo, o en su caso un ínfimo, mayor que cero.

Si α es una raíz de la ecuación f(x) = 0, y tomamos como valor aproximado el número $a \in D$, llamaremos **error de la aproximación** al número **e = |a** – α|.

La aproximación será tanto mejor cuanto más pequeño sea e.

En la resolución aproximada de una ecuación distinguiremos dos etapas bien diferenciadas:

1. Separar o localizar las raíces, que consiste en hallar intervalos [a, b] que contienen en su interior una sola raíz.
2. Aproximar una raíz contenida en el intervalo [a, b], es obtener un punto de este intervalo, que diste de la raíz menos que una cantidad prefijada.

3.1. SEPARACIÓN DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN

No existen métodos generales para resolver el problema de la separación.

Siempre es conveniente observar la función con la intención de delimitar las zonas de la recta real en las que puedan estar situadas las raíces, lo que en ocasiones es difícil de conseguir. Nos limitaremos a indicar algunos caminos a seguir, que en general serán suficientes para resolver nuestro problema.

Proposición

Sea f continua en el intervalo [a, b], y derivable y con derivada de signo constante en el intervalo (a, b). Entonces:

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene una sola raíz en el intervalo (a, b).
Si $f(a) \cdot f(b) > 0$, la ecuación no tiene ninguna raíz en el intervalo (a, b).

Demostración

Supongamos $f(a) \cdot f(b) < 0$. En este caso la función toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo [a, b], y en él se verifican las condiciones exigidas por el teorema de Bolzano, lo que garantiza la existencia de al menos un $\alpha \in (a, b)/f(\alpha) = 0$.

Por otra parte si f' es positiva en (a, b) $\Rightarrow$ que f es estrictamente creciente en (a, b) lo que significa que:

$$f(x) < f(\alpha) = 0 \text{ si } x < \alpha; \text{ y } f(x) > f(\alpha) = 0 \text{ si } x > \alpha$$

lo que demuestra que α será la única raíz del intervalo.

De manera análoga se razonaría en el caso en que f' sea negativa en (a, b) (f estrictamente decreciente en (a, b)).

Si $f(a) \cdot f(b) > 0$, la función toma valores del mismo signo en los extremos del intervalo [a, b]. Si además f' es positiva, f es estrictamente creciente, luego

$$f(a) < f(x) < f(b) \ \forall x \in (a, b)$$

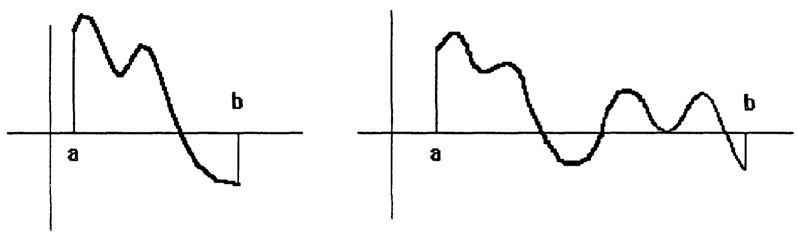
Así si f(a) y f(b) son positivos, también lo es f(x); y si f(a) y f(b) son negativos, también lo es f(x) $\forall x \in (a, b)$. Por tanto no existe ninguna raíz en (a, b).

De manera análoga se razona en el caso en que f' sea negativa en (a, b) (f estrictamente decreciente en (a, b)).

Observación

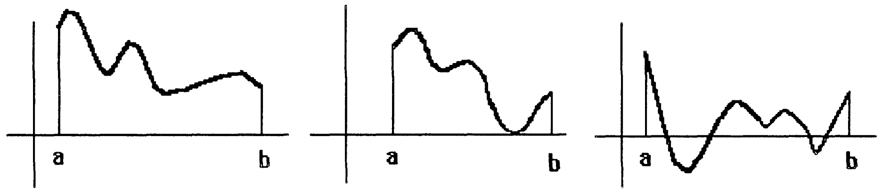
Cuando en un intervalo la derivada no tenga signo constante, la función será creciente en unos puntos y decreciente en otros, y nada puede afirmarse sobre el número de raíces que hay en él. Obsérvense las imágenes adjuntas

f[a]·f[b] < 0



Una raíz   más de una raíz

f[a] · f[b] > 0



ninguna raíz   una raíz   más de una raíz

Proposición

Sea f continua y derivable en el intervalo (a, b), y sean x_1, x_2 dos ceros consecutivos de f'. Entonces existe a lo más una raíz de f(x) en el intervalo (x_1, x_2).

Demostración

Supongamos que existiesen dos raíces $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ distintas de f(x) = 0, en el intervalo (x_1, x_2); y supongamos que $\alpha_1 < \alpha_2$.

Como la función f verifica las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$, existiría $x_3 \in (\alpha_1, \alpha_2)$ tal que $f'(x_3) = 0$; lo que contradice la hipótesis de que x_1 y x_2 son raíces consecutivas de f'.

Método gráfico

Cuando la ecuación f(x) = 0, tiene una ecuación equivalente de la forma:

$$\mathbf{g(x) = h(x)}$$

y las gráficas de las funciones g y h son sencillas; por la equivalencia de las ecuaciones, las raíces de la primera, son las abcisas de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones g y h, que si una vez hecha la correspondiente representación no son conocidas con exactitud, al menos sí será posible dar intervalos en los que estén aisladas.

Ejemplo: Separar las raíces de la ecuación:

$$f(x) = 2x - 5 - 17 \text{ sen } (x) = 0$$

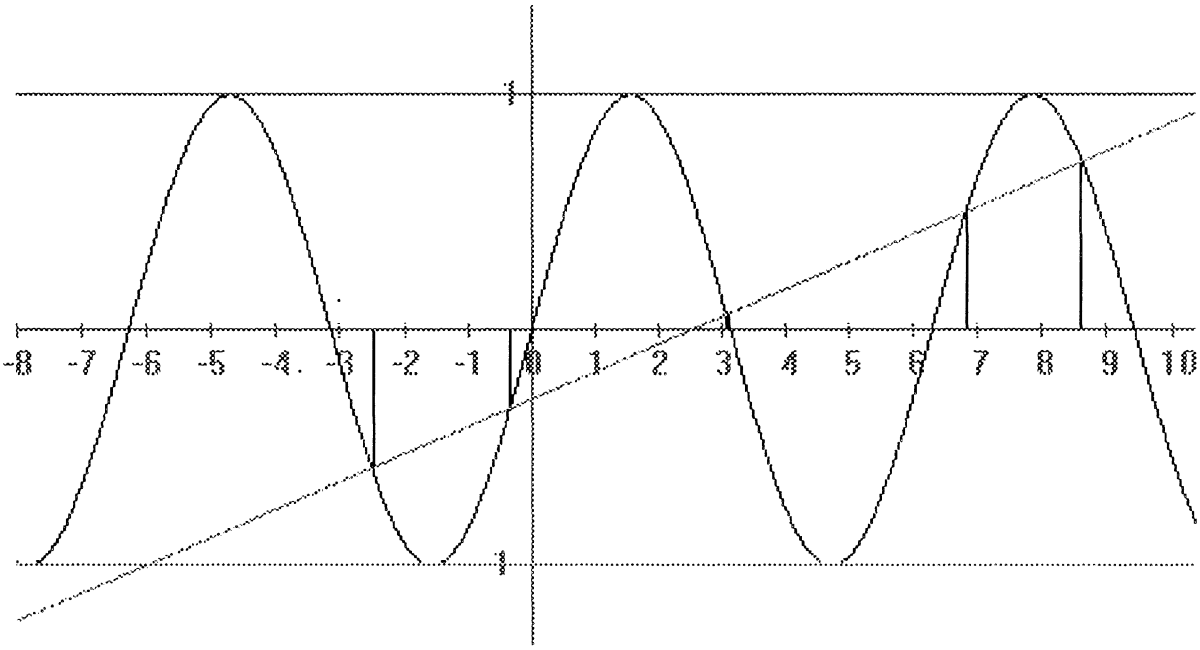
La ecuación f(x) = 0 es equivalente a la ecuación:

$$\frac{2}{17}x - \frac{5}{17} = \text{sen } x$$

Representemos gráficamente la recta

$$y = \frac{2}{17}x - \frac{5}{17}$$

y la función **y = sen (x)**:



En el dibujo se observan los cinco únicos puntos de intersección de estas dos gráficas, sus abscisas corresponderán a las raíces de la ecuación de partida, por tanto podemos concluir que las cinco raíces se encuentran en los intervalos:

$$[-3, -2];\ [-1, 0];\ [2, 3];\ [6, 7];\ [8, 9]$$

3.2. APROXIMACIÓN DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN

Una vez separadas las raíces de una ecuación, se procede a aproximarlas.

Una aproximación de una raíz α, de una ecuación $f(x) = 0$, con error menor o igual que un cierto $\varepsilon > 0$, es cualquier número real x, tal que

$$\mathbf{e} = |\mathbf{x} - \alpha| < \varepsilon$$

Supondremos en todo lo que sigue, salvo mención contraria, que α es la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$, en el intervalo $[a, b]$, y que el error de aproximación e, es $e \le \varepsilon < b - a$.

En general, para obtener una aproximación c de α, con error $e \le \varepsilon$, se procede así:

Se calcula, mediante algún criterio, un número c_1. El valor $|c_1 - \alpha|$, al igual que α es desconocido. Pero si se puede afirmar que $|c_1 - \alpha| \le \varepsilon$, se toma como aproximación de α el valor $c = c_1$.

En caso contrario, por igual procedimiento, se elige otro número c_2; si se puede asegurar que $|c_2 - \alpha| < \varepsilon$, se toma $c = c_2$; en caso contrario repetimos el proceso hasta encontrar, si es posible, un c_p del que podamos afirmar que $|c_p - \alpha| \le \varepsilon$; y éste es el que tomamos como aproximación de α.

Los criterios o métodos que se apliquen para la obtención de los valores c_1, c_2, ... conviene que tengan la propiedad de proporcionar una sucesión $\{c_n\}$ convergente a α, lo que garantizaría la existencia de c_p y la posibilidad de su obtención.

Y, entre los métodos que cumplen esta condición, son óptimos los que menos cálculo requieran, que suelen coincidir con aquéllos para los que p sea menor.

Exponemos a continuación algunos de los métodos más usuales.

Método I

Supongamos que f es continua y tiene una sola raíz α en el intervalo [a, b], y que toma valores de signo contrario en los extremos de dicho intervalo.

Tomamos como

$$c_1 = \frac{a+b}{2}$$

Calculamos $f(c_1)$. Si $f(c_1) = 0$, entonces $\alpha = c_1$ y concluimos: en caso contrario α pertenece a uno sólo de los intervalos $[a, c_1]$, $[c_1, b]$; justo a aquél en que f toma valores de signo contrario en los extremos, y que designaremos por $[a_1, b_1]$.

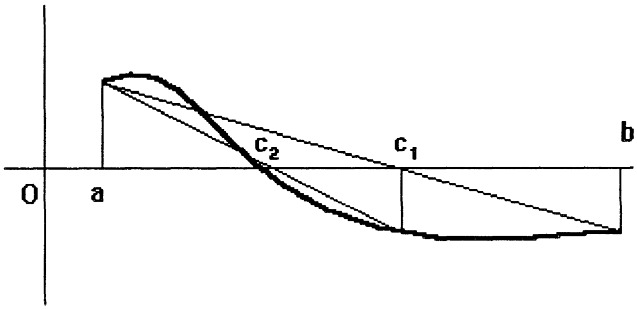
Si $b_1 - a_1 \le \varepsilon$ (error máximo prefijado) se toma como aproximación de α el valor c_1, o cualquiera otro del intervalo $[a_1, b_1]$. Si $b_1 - a_1 > \varepsilon$, entonces se repite el proceso hasta llegar a un c_p que sea la raíz o sea tal que la longitud del intervalo $[a_p, b_p]$ sea $\le \varepsilon$. En tal caso, se toma c_p como aproximación de α, o cualquier otro punto del intervalo $[a_p, b_p]$.

3.2.1. Método de regula falsi

Supongamos que f es continua y tiene un solo cero en [a, b], donde toma valores de signo contrario en los extremos.

Se elige como valor c_1, la abscisa del punto de corte del eje OX con la recta que pasa por los puntos (a, f(a)), y (b, f(b))

Figura 1



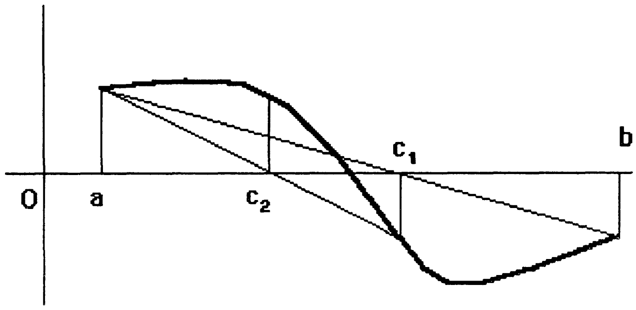


Figura 2

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (a, f(a)) (b, f(b)) es:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

y la abscisa del punto de corte con el eje OX (recta y = 0) es:

$$c_1=a-\frac{f(a)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)}=\frac{af(b)-af(a)-bf(a)+af(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

Si c_1 no da la aproximación requerida, calculamos el valor de f en c_1 y nos quedamos con el intervalo $[a, c_1]$ o $[c_1, b]$ que esté en las condiciones anteriores (la función tome valores de signos contrario en los extremos); y así sucesivamente hasta llegar a un valor c_p del que se pueda asegurar que el error cometido es menor que el ε prefijado.

Puede ocurrir que al aplicar sucesivamente el método, la longitud de los intervalos que se van determinando tienda a 0 como ocurre en la (figura 2). Esta situación, sin embargo, no es general como puede apreciarse en la figura 1, en donde la raíz α queda siempre entre a y c_n, por lo que la longitud de los intervalos $[a_n, b_n] = [a, c_n]$ se mantiene siempre mayor o igual que $\alpha - a$. En estos casos el cálculo del error exige otro procedimiento.

Proposición

Si la ecuación f(x) = 0, tiene una sola raíz en el intervalo [a, b], en el que f es continua, derivable y además

$$m = \min_{a \le x \le b} \left| f'(x) \right| > 0 \Rightarrow \forall c \in (a,b) \text{ se verifica que: } \quad \left| c - \alpha \right| \le \frac{\left| f(c) \right|}{m}$$

Demostración

Por el teorema del valor medio, $\exists\, \xi \in (c, \alpha) / f(c) - f(\alpha) = (c - \alpha) \cdot f'(\xi)$.

Tomando valores absolutos, y recordando que $f(\alpha) = 0$, tenemos:

$$|f(c)| = |c - \alpha| \cdot |f'(\xi)| \ge |c - \alpha| \cdot m$$

de donde

$$\left| c - \alpha \right| \le \frac{\left| f(c) \right|}{m}$$

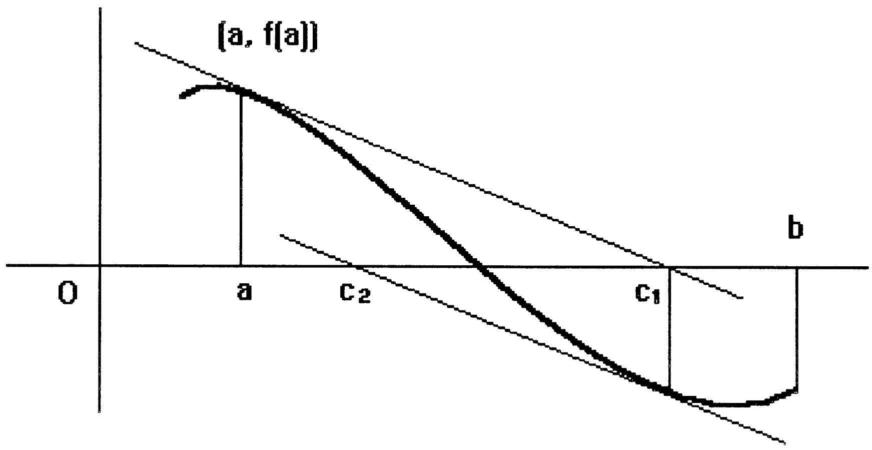
Así el error que se comete al tomar c_p como aproximación de α verifica

$$e = \left| c - \alpha \right| \le \frac{\left| f(c) \right|}{m}$$

3.2.2. Método de Newton o de las tangentes

A las condiciones anteriormente exigidas a f, añadimos la derivabilidad en el intervalo (a, b).

Elegimos uno de los extremos del intervalo [a, b]; que designaremos por c, consideramos la recta tangente a la curva y = f(x) que pasa por el punto (c, f(c)); y tomamos como primera aproximación de la raíz α, al valor c_1 de la abscisa del punto de intersección de la tangente con el eje OX.



La ecuación de la recta tangente a y = f(x) en el punto de coordenada (c, f(c)), es:

$$y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$$

y al intersecar con el eje OX (recta y = 0), nos queda:

$$c_1 = c - \frac{f(c)}{f'(c)}$$

Obtenido c_1, aplicamos nuevamente método I de Newton, considerando la tangente que pasa por el punto $(c_1, f(c_1))$, y tomando como punto c_2, la abscisa del punto de corte de la tangente anterior con el eje OX. De esta manera tenemos:

$$c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)}$$

Obtenemos de esta forma una sucesión de puntos $\{c_n\}$ con:

$$c_n = c_{n-1} - \frac{f(c_{n-1})}{f'(c_{n-1})}$$

Ahora bien, puede ocurrir a veces que al trazar las tangentes, nos salgamos fuera del intervalo [a, b], lo que desaconseja el cálculo de más valores por este método.

Veamos bajo qué condiciones es aconsejable su utilización pues nos asegura la convergencia de la sucesión $\{c_n\}$ hacia la raíz α.

Proposición

Si f(x) es tal que:

– f(x) tiene una sola raíz en el intervalo $[a, b] \subset D$.
– $f(a) \cdot f(b) < 0$.
– f es derivable al menos hasta segundo orden en (a, b).
– $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$.
– f'' es de signo constante en (a, b).

y tomando como extremo c aquel en que sig. (f(c)) = sig. (f''), entonces se puede aplicar sucesivamente el método de Newton, siendo cada valor c_n mejor aproximación que c_{n-1}, y además $\{c_n\}$ converge hacia α.

Notar que bajo estas condiciones f es monótona en [a, b], ya que al existir f'' la función f' es derivable y por tanto continua. Además al ser $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$, su signo es constante y en consecuencia f es estrictamente creciente (si $f' > 0$), o estrictamente decreciente (si $f' < 0$). Es más, el signo de f' queda determinado por el de f(a) (si $f(a) > 0$, f ha de ser decreciente y por tanto $f' < 0$, y si $f(a) < 0$, f es creciente y $f' > 0$).

Demostración

Veamos primero que $c_1 \in (c, \alpha)$, supuesto que c = a (análogo si c = b).

Por el desarrollo de Taylor de la función f(x) en torno al punto $x_0 = c = a$

$$f(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2}\cdot(x-c)^2 \quad \xi \in (a, x) \qquad (1)$$

Evaluando en el punto $x = \alpha$, tenemos

$$0 = f(\alpha) = f(c) + f'(c)\cdot(\alpha - c) + \frac{f''(\xi)}{2}(\alpha - c)^2$$

de donde:

$$\alpha = c - \frac{f(c)}{f'(c)} - \frac{f''(\xi)}{2f'(c)}(\alpha - c)^2$$

con

$$\operatorname{sig}\left(\frac{f(c)}{f'(c)}\right) = \operatorname{sig}\left(\frac{f''(\xi)}{2f'(c)}(\alpha - c)^2\right)$$

pues sig (f(a)) = sig (f”). Luego:

$$\alpha = c - \frac{f(c)}{f'(c)} + \left(-\frac{f''(\xi)}{2f'(c)}(\alpha - c)^2\right) > c_1 = c - \frac{f(c)}{f'(c)} > c$$

Por tanto $\alpha > c_1 > c$, es decir $c_1 \in (c, \alpha)$.

Además como el signo de f es constante en $[a, \alpha)$, y sig $(f(c_1))$ = sig (f”), y razonando de igual forma tenemos $c_2 \in (c_1, \alpha)$, y así sucesivamente obtenemos $c_n \in (c_{n-1}, \alpha)$, y en consecuencia c_n es mejor aproximación que c_{n-1}.

Por último, como la sucesión que hemos construido (supuesto a = c), es monótona creciente, acotada inferiormente por α, entonces es convergente y su límite será:

$$L = \lim_{n\to\infty} c_n = \in [a, \alpha); \qquad y \quad c_n = c_{n-1} - \frac{f(c_{n-1})}{f'(c_{n-1})}$$

Tomando límites en ambos miembros y teniendo en cuenta la continuidad de f y f’ en [a, b] tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} c_{n-1} - \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(c_{n-1})}{\lim\limits_{n\to\infty} f'(c_{n-1})} \Leftrightarrow L = L - \frac{f(L)}{f'(L)} \Rightarrow f(L) = 0$$

con lo que

$$\alpha = L = \lim_{n\to\infty} c_n \qquad \text{c.q.d.}$$

En las condiciones de la proposición, y llamando:

$$M = \sup. |f''(x)| \qquad x \in [a, b]$$
$$m = \min. |f'(x)| \qquad x \in [a, b]$$

y sustituyendo en la expresión (1) para c_{n-1} tenemos:

$$\alpha = c_{n-1} - \frac{f(c_{n-1})}{f'(c_{n-1})} - \frac{f''(\xi)}{2f'(c_{n-1})}(\alpha - c_{n-1})^2 \Rightarrow \alpha - c_n = \frac{f''(\xi)}{2f'(c_{n-1})}(\alpha - c_{n-1})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e = |\alpha - c_n| < \frac{M}{m} \cdot (\alpha - c_{n-1})^2 < \frac{M}{m} \cdot (b-a)^2$$

3.2.3. Método de iteración

Dada una ecuación f(x) = 0, el método de iteración se aplica como sigue:

Se obtiene una ecuación de la forma x = g(x), equivalente a la dada. Por ejemplo, la ecuación f(x) = 0, es equivalente a las ecuaciones de la forma

$$x = x - Kf(x) \text{ con } K \in \mathbb{R}, K \neq 0 \text{ o}$$
$$x = (Kx - f(x))/K \text{ con } K \in \mathbb{R}, K \neq 0$$

Tras ello elegimos un valor $c \in [a, b]$, y tomamos como primera aproximación de α, el valor $c_1 = g(c)$, $c_2 = g(c_1)$, ..., $c_n = g(c_{n-1})$, ... (si g está definida para los valores que se van obteniendo).

Veamos una condición suficiente para que ello se pueda hacer, y la sucesión $\{c_n\}$ converja a la raíz α.

Proposición

Supuesto que las ecuaciones f(x) = 0, y x = g(x), son equivalentes en [a, b], y que verifican:

– f sólo tiene una raíz α en [a, b].
– g es derivable en [a, b].
– $\exists K \in (0,1) / |g'(x)| < K < 1 \ \forall x \in [a, b]$.

Entonces, $\forall c \in [a, b]$, la sucesión definida por:

$$c_1 = g(c),\ c_2 = g(c_1),\ ...,\ c_n = g(c_{n-1})$$

converge a la raíz α de ambas ecuaciones.

Además, en estas condiciones, si c_p es la aproximación de α, entonces:

$$e = \left| c_p - \alpha \right| = \frac{\left| c_{p+1} - c_p \right|}{1-K}$$

4. ECUACIONES ALGEBRAICAS

Como las funciones polinómicas son derivables hasta cualquier orden, para ellas es válido todo el estudio precedente.

Del teorema fundamental del Álgebra, se deduce que el número de raíces de una ecuación algebraica con coeficientes reales es finito y no excede a su grado, y entonces podemos acotarlas. Además como el número de raíces reales y complejas es exactamente n, y las raíces complejas se presentan a pares (si un número complejo es raíz también lo es su conjugado), tenemos que el número de raíces reales es igual al grado n, menos un múltiplo de dos, y por tanto si n es impar, la ecuación f(x) = 0 tiene al menos una raíz real.

Vamos a completar un poco lo visto hasta ahora, acotando las raíces de la ecuación y precisando algunos resultados sobre separación.

4.1. RAÍCES RACIONALES DE UNA ECUACIÓN ALGEBRAICA CON COEFICIENTES ENTEROS

Dado el polinomio p(x) con coeficientes enteros:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

Si los coeficientes fueran racionales, multiplicando por el **m.c.m.** de los denominadores, se transformaría en una ecuación con coeficientes enteros.

Proposición

Condición necesaria para que la fracción irreducible **r/s** sea solución de la ecuación p(x) = 0, es que r divida al término independiente a_0, y s divida al término de grado n, a; $r|a_0$ y $s|a_n$.

Demostración

La demostración de este resultado se encuentra hecha en el tema anterior.

Consecuencias

Como consecuencias de este resultado tenemos:

a) Las posibles raíces enteras de la ecuación $p(x) = 0$, son los divisores de a_0.
b) Si el coeficiente principal de la ecuación (a_n), es uno ($a_n = 1$), la ecuación no tiene raíces racionales no enteras.

4.2. ACOTACIÓN DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN ALGEBRAICA CON COEFICIENTES REALES

En lo que sigue supondremos que en la ecuación $p(x) = 0$, $p(x)$ es un polinomio de grado n, con coeficientes reales y tal que $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$. También supondremos que en caso de tener coeficientes enteros, no tiene raíces enteras ni racionales (ya las habíamos calculado por los procedimientos anteriores).

El problema de acotación de raíces, consiste en determinar una cota inferior y una cota superior del conjunto de las raíces de $p(x) = 0$. Calculemos primero la cota superior.

4.2.1. Método de acotación de Laguerre

Si al dividir $p(x)$ por $(x - a)$, $a > 0$, todos los coeficientes del polinomio cociente y el resto son no negativos, entonces el número a es una cota superior de las raíces de $p(x) = 0$.

Demostración

Tenemos por la división euclídea que $p(x) = (x - a) \cdot c(x) + r$, donde $c(x)$ es un polinomio con todos sus coeficientes positivos, y $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Luego $c(x) > 0\ \forall x > 0$. En particular si $x > a$, $c(x) > 0$.

Además $(x - a) > 0$ si $x > a$, y en consecuencia $p(x) > 0$ si $x > a \Rightarrow$ a es una cota superior de las raíces.

4.2.2. Método de Newton

Si a es tal que los números p(a), p'(a), p"(a), ..., $p^{n)}(a)$ son no negativos, entonces a es una cota superior de las raíces de la ecuación algebraica p(x) = 0.

Demostración

Desarrollando p(x) por la fórmula de Taylor en torno del punto a, tenemos:

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \cdots + \frac{p^{n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

Como p(a), p'(a), ..., $p^{n)}(a) > 0$; y $(x - a)^i > 0$ si x > a (i = 1,2, ..., n), se tiene que p(x) > 0 si x > a $\Rightarrow$ a es una cota superior.

En la práctica el método se aplica de la siguiente forma:

Supuesto $p^{n)} > 0$, se elige un número entero e_{n-1} para el que la derivada (n – 1)-ésima sea positiva $p^{n-1)}(e_{n-1}) > 0$. Si $p^{n-2}(e_{n-1}) > 0$, entonces tomamos $e_{n-2} = e_{n-1}$, en caso contrario elegimos $e_{n-2} > e_{n-1}$ para el cual $p^{n-2)}(e_{n-2}) > 0$, y así sucesivamente.

Cálculo de una cota inferior

Si en una ecuación algebraica se sustituye x por –x, se obtiene una ecuación p(–x) = 0, cuyas raíces son opuestas a las de la ecuación p(x) = 0. Así si K es una cota superior de las raíces de p(–x), entonces –K será una cota inferior de las raíces de p(x) = 0.

Por tanto el problema de acotación de raíces queda resuelto si calculamos cotas superiores para las raíces de p(x) = 0 y p(–x) = 0.

Ejemplo

Dada la ecuación $x^5 - x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 11x + 9 = 0$, para calcular una cota inferior de sus raíces, calcularemos una cota superior de las raíces de

$$(-x)^5 - (-x)^4 - 9\,(-x)^3 + 10\,(-x)^2 - 11\,(-x) + 9 = 0, \Rightarrow$$
$$-x^5 - x^4 + 9x^4 + 10x^2 + 11x + 9 = 0$$

4.3. SEPARACIÓN DE RAÍCES

Todo lo desarrollado anteriormente es válido para ecuaciones algebraicas de grado n, $p(x) = 0$. Vamos a dar unos resultados que completan a los que ya vimos, y alguno más.

Proposición

Si una función polinómica toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo $[a, b]$, entonces en dicho intervalo existe un número impar de raíces de la ecuación $p(x) = 0$; y si toma valores de igual signo en los extremos, entonces hay en dicho intervalo un número par (eventualmente ninguna) de raíces de $p(x) = 0$. Las raíces múltiples se consideran con su orden de multiplicidad.

Demostración

Sean $r_1, r_2, ..., r_k$ las raíces de $p(x) = 0$ en el intervalo (a, b). Se verifica que:

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_k) \cdot q(x) \text{ con } q(x) \neq 0 \text{ en el intervalo } (a, b).$$

Evaluando en $x = a$, $x = b$; tenemos

$$p(a) = (a - r_1)(a - r_2) \cdot \dots \cdot (a - r_k) \cdot q(a)$$
$$p(b) = (b - r_1)(b - r_2) \cdot \dots \cdot (b - r_k) \cdot q(b)$$

y signo $(q(a))$ = signo $(q(b))$, pues $q(x)$ es un polinomio y por tanto continuo en (a, b), y si hubiera cambio de signo forzosamente debería haber en (a, b) una raíz de $q(x)$, que sería raíz de $p(x)$.

Por otra parte tenemos que $(a - r_i) < 0$, $(b - r_i) > 0$ $\forall i$, de donde si:

a) Signo $(p(a)) \neq$ signo $(p(b)) \Rightarrow$ signo $[(a - r_1) \cdot \dots \cdot (a - r_k)] \neq$ signo $[(b - r_1) \cdot \dots \cdot (b - r_k)]$ lo que exige que haya un número impar de factores $\Rightarrow k$ es impar.
b) Signo $(p(a))$ = signo $(p(b)) \Rightarrow$ signo $[(a - r_1) \cdot \dots \cdot (a - r_k)]$ = signo $[(b - r_1) \cdot \dots \cdot (b - r_k)]$ lo que exige que haya un número par de factores, o ninguno $\Rightarrow k$ es par o nulo.

A continuación enunciaremos otros resultados, cuya demostración no la haremos por exceder de los objetivos de este tema.

4.3.1. Método de Sturm

Dado un polinomio de grado n, p(x); construimos la siguiente sucesión de polinomios:

Calculamos p'(x) y efectuamos la división euclídea entre p(x) y p'(x), $p(x) = p'(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$; y nos quedamos con $-r_1(x) = p_1(x)$.

Ahora dividimos p'(x) entre $p_1(x)$, $p'(x) = p_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)$; y nos quedamos con $-r_2(x) = p_2(x)$; y así sucesivamente hasta que lleguemos a un resto que sea una constante.

El método de Sturm nos dice: dado un polinomio p(x), que no tiene raíces múltiples en [a, b], y tal que $p(a) \cdot p(b) \neq 0$. Construimos la sucesión anteriormente descrita:

$$\{p(x), p'(x), p_1(x), ..., p_n(x)\}$$

Entonces el número de raíces reales de p(x) = 0, en el intervalo (a, b) es igual a V(a) – V(b), siendo

$$V(a) = \text{Var}\ \{p(a), p'(a), p_1(a), ..., p_n(a)\}$$

donde Var indica el número de veces que cambia de signo ese conjunto de números.

$$V(b) = \text{Var}\ \{p(b), p'(b), p_1(b), ..., p_n(b)\}$$

Si p(x) tuviera raíces múltiples en [a, b], entonces éstas serían también raíces de p'(x), por lo que son raíces de q(x) = M.C.D. {p(x), p'(x)}; y dividiendo por q(x) estamos en el caso anterior.

Ejemplo

Sea

$$p(x) = x^4 - 4x + 1$$
$$p'(x) = 4x^3 - 4$$
$$p(x) = p'(x) \cdot \frac{1}{4}x + (-3x+1) \Rightarrow p_1(x) = 3x - 1$$
$$p'(x) = p_1(x) \cdot \left(\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{4}{27}\right) + \left(-\frac{104}{27}\right) \Rightarrow p_2(x) = \frac{104}{27}$$

Tenemos la sucesión:

$$\{x^4 - 4x + 1;\ 4x^3 - 4;\ 3x - 1;\ 104/27\}$$

y así, por ejemplo, en el intervalo [0, 2], tenemos

$$V(0) = \text{Var}\ \{1, -4, -1, 104/27\} = 2$$
$$V(2) = \text{Var}\ \{9, 28, 5, 104/27\} = 0$$

lo que implica que en el intervalo [0, 2] hay dos raíces.

Otros resultados menos precisos que el método de Sturm, aunque menos laboriosos, son:

4.3.2. Teorema de Descartes

El número de raíces positivas distintas de un polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x + ... + a_nx^n$$

es igual o inferior en un número par a:

$$\text{Var}\ [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0\}$$

4.3.3. Teorema de Budan-Fourier

Dado un polinomio de grado n, p(x) y un intervalo [a, b] tal que $p(a) \cdot p(b) \neq 0$. Entonces el número de raíces (contadas con su multiplicidad) de la ecuación $p(x) = 0$, es igual a: $V(a) - V(b) - 2k/k \in \mathbb{N}$, siendo $V(x) = \text{Var}\ \{p(x), p'(x), p''(x), ..., p^{n)}(x)\}$.

RESUMEN

A lo largo de este tema hemos visto numerosos métodos, fruto del trabajo intelectual de insignes matemáticos, para calcular de forma aproximada las raíces reales de cualquier ecuación (fundamentalmente racionales); pero todos ellos son muy laboriosos.

Hemos comenzado el tema haciendo una introducción a las ecuaciones, lo que se entiende por ecuación y solución y una clasificación.

Luego hemos pasado a la resolución de aquellas ecuaciones que están totalmente estudiadas, son las polinómicas de grado menor o igual que tres.

En el apartado de aproximación de raíces hay dos conceptos que hay que tener muy claros, por un lado la separación de raíces y por otro el de aproximación a una de ellas.

La incorporación del ordenador al mundo actual, ha permitido simplificar de manera notable estos métodos puesto que la máquina realiza los cálculos de manera rápida y eficiente.

EDITA Y DISTRIBUYE:

CENTRO DOCUMENTACIÓN DE ESTUDIOS Y OPOSICIONES - C/ CARTAGENA, 129 – 28002 MADRID
www.cede.es – e-mail: oposiciones@cede.es – TEL.: 91 564 42 94